Лекция 12. Риман беттері

Жоспар:

1. Анықтама
2. Мысалдар
3. Логарифмдік шегерім туралы теорема
4. Аргумент қағидасы

Анықтама. $f(z)$ функциясы логарифмінің туындысы болатын $\varphi(z)$ функциясын $f(z)$ функциясының *логарифмдік туындысы* деп атайды:

$$\varphi(z) = (Ln\, f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$f(z)$ функциясының нөлдері мен ерекше нүктелері ғана $\varphi(z)$ функциясының ерекше нүктелері бола алады.

$f(z)$ функциясының логарифмдік туындысының, $f(z)$ функциясының нөлі болатын нүктедегі шегерімі, осы нөлдің ретіне тең, ал полюсі болатын нүктеде – осы полюстің теріс таңбамен алынған ретіне тең.

1-мысал. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$ функциясының логарифмдік туындысының нөлдері мен полюстеріндегі шегерімдерін табыңыз.

Шешуі. Берілген функцияның шексіз көп бірінші ретті нөлдері $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ және бірінші ретті жалғыз полюсі бар : $z = 0$.

Демек,

$$\underset{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}{res} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1,\ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$$

$$\underset{z=0}{res} \frac{f'(z)}{f(z)} = -1$$

Анықтама. $f(z)$ функциясы L тұйық контурының барлық нүктелерінде аналитикалық болсын.

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ – шамасы $f(z)$ функциясының L контурының бойымен *логарифмдік шегерімі* деп аталады.

Логарифмдік шегерім туралы теорема. $f(z)$ функциясы тұйық D облысында саны ақырлы полюстерінен басқа нүктелердің барлығында аналитикалық және осы облыстың L шекарасында нөлдері мен полюстері жоқ болсын. Онда $f(z)$ функциясының D облысындағы нөлдері мен полюстерінің арасындағы айырмасы, осы $f(z)$ функциясының L тұйық контуры бойынша алынған логарифмдік шегеріміне тең:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P \qquad (18.1)$$

мұнда N және P – $f(z)$ функциясының D облысындағы сәйкеснөлдері мен полюстері.

2-мысал. $f(z) = \dfrac{(z+1)^5(z^2+1)^2}{(z+2)^6}$ функциясының $L: |z| = 3$ контуры бойымен логарифмдік шегерімін табыңыз.

Шешуі. Берілген функцияның $z_1 = -1$ нүктесінде 5 еселік және $z_{2,3} = \pm i$ нүктелерінің әрқайсысында 2 еселік нөлдері бар, сонымен қатар $z_4 = -2$

нүктесінде 6 еселік полюсі бар. Барлық табылған нүктелер $|z|<3$ дөңгелегінде орналасқан. Демек,

$$N = 5 + 2 + 2 = 9, \;\; P = 6.$$

Олай болса, (18.1) – формула бойынша

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 9 - 6 = 3$$

3-мысал. $f(z) = \dfrac{z^4 - 81}{1 - \cos \pi z}$ функциясының $L: |z| = 5$ контуры бойымен логарифмдік шегерімін табыңыз.

Шешуі. Алымының нөлдерін табайық: $z^4 - 81 = (z^2 - 9)(z^2 + 9) = 0$. Берілген функцияның $z_{1,2} = \pm 3, \;\; z_{3,4} = \pm 3i$ нүктелерінде бір еселік нөлдері бар. Нөлдерінің саны төртеу.

Полюстерін табу үшін бөлімін нөлге теңестіреміз: $1 - \cos \pi z = 0$.

Демек, $\pi z = 2\pi n, \;\; z = 2n, \;\; (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Полюстерінің еселігі екіге тең.

$|z| < 5$ дөңгелегінде берілген функция $z_1 = 3, \;\; z_2 = -3, \;\; z_3 = 3i, \;\; z_4 = -3i$ нүктелерінде бір еселік нөлдері және еселіктері екіге тең бес полюстері бар: $z_1 = 0, \;\; z_2 = 2, \;\; z_3 = -2, \;\; z_4 = 4, \;\; z_5 = -4$. Демек,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=5} \frac{z^4 - 81}{1 - \cos \pi z}dz = 4 - 5 \cdot 2 = -4$$

Аргумент қағидасы. $f(z)$ функциясының L тұйық контуры бойымен логарифмдік шегерімі L контурын айналғандағы $f(z)$ функциясы аргументінің $\Delta_L Arg\; f(z)$ өсімшесінің 2π – ге бөлінген мәніне тең:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_L Arg\; f(z) \qquad (18.2)$$

Демек, $f(z)$ функциясының D облысындағы нөлдері мен полюстері сандарының айырмасы тең:

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_L Arg\; f(z) \qquad (18.3)$$

Дербес жағдайда, егер $f(z)$ функциясы D облысында аналитикалық және оның L шекарасында нөлдері болмаса, онда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_L Arg\; f(z) = N \qquad (18.4)$$

Бұл формула, мысалы $Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ көпмүшелігі үшін орындалады.

Аргумент қағидасы, әсіресе (18.4) – формуласы жиі қолданылады.

Мысалы, келесі екі теореманы келтірейік.

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.